



UNIVERSITÄT
LEIPZIG

Algorithmen und Datenstrukturen II

Vorlesung шест6

Leipzig, 25.11.2026

Peter F. Stadler & Thomas Gatter

LINEARE PROGRAMMIERUNG

Produktionsprobleme

- N verschiedene Produkte $x_1, x_2, \dots, x_N \dots$
 - ...werden aus m Rohstoffen hergestellt.
 - Die Herstellung von Produkt x_i verbraucht c_{ij} Einheiten von Rohstoff j .
 - Die Menge jedes Rohstoffes j ist mit b_j beschränkt.
 - Jedes Produkt i erzielt z_i Gewinn.
- ⇒ Optimierte die Produktion so, dass der Gewinn maximiert wird.

Hinweis: Viele Varianten existieren für diese Art von Problem. In anderen Versionen werden Rohstoffe als unbegrenzt angesehen aber dafür ist die Produktionszeit limitiert, etc. Der Fantasie werden lediglich mathematische Grenzen gesetzt.

Beispiel: Bierproduktion

	Rohstoffverbrauch			Gewinn z
	<i>Hopfen</i>	<i>Malz</i>	<i>Hefe</i>	
Ale x_1	2	1	1	3
Lager x_2	1	2	1	2
Max. Vorhanden b	20	20	12	

Wir erhalten ein (Un-)Gleichungssystem aus den Spalten:

– Hopfen $2x_1 + 1x_2 \leq 20$

– Malz $1x_1 + 2x_2 \leq 20$

⇒ Maximiere Gewinn $3x_1 + 2x_2$

– Hefe $1x_1 + 1x_2 \leq 1$

Zudem nehmen wir an, dass keine negativen Biere gebraut werden können.

Also $x_1, x_2 \geq 0$

Optimierungsalgorithmen

Problemstellung: Optimierung

Lösungsmenge X , Bewertungsfunktion $f : X \rightarrow \mathbb{R}$.

Finde globales Minimum (oder Maximum) von f

Die Natur von X bestimmt welche Methoden wir nutzen können:

- diskret vs. stetig
- endlich vs. unendlich dimensional
- statisch vs. dynamisch
- Constraints (Positivität, Energieerhaltung, Wegpunkte, Produktionsziele, Kollisionsvermeidung, ...)
- ...

Bewertungsfunktion

Auch die Bewertungsfunktion beeinflusst unsere Möglichkeiten:

- linear, polynomisch, exponentiell, ...
- differenzierbar?
- convex?
- ...

Es gibt zahlreiche Familien von Methoden die (fast) alle Kombinationen abdecken: Linear programming, Quadratic programming, Fractional programming, Constraint satisfaction, Stochastische Optimierung, ...

Wir wollen uns hier Lineare Programmierung etwas genauer anschauen.

Linearität

Lineare Funktion

Jede **Lineare Funktion** f folgt der Form $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = c_1x_1 + c_2x_2 + \dots + c_nx_n$ mit Variablen $x_1, x_2, \dots, x_n$ und Konstanten $c_1, c_2, \dots, c_n$.

Lineare Ungleichung

Lineare Ungleichungen folgen der Form $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq b$ oder $f(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq b$ mit linearer Funktion $f(\cdot)$ und Konstante b .

Lineare Gleichung

Eine **Lineare Gleichung** folgt der Form $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = b$ mit linearer Funktion $f(\cdot)$ und Konstante b .

Linearität

In der Vorlesung nehmen wir zumeist an, dass $x_i, c_i \in \mathbb{R}$.

In vielen praktischen Anwendungen ist es nützlich das Problem auf ganzzahlige Variablen zu beschränken, also $x_i \in \mathbb{N}$.

Sind folgende Funktionen/Gleichungen/Ungleichungen linear?

$$f(x_1, x_2) = 3x_1 + x_2 \quad \checkmark \quad f(x_1, x_2) = x_1 \cdot x_2 \quad \times \quad f(x_1, x_2) = x_1 + 3\sqrt{x_2} \quad \times$$

$$2^2 x_1 + \frac{1}{2} x_2 \geq 2 \quad \checkmark \quad 2x_1 + 3x_2 < -2 \quad \checkmark \quad 2x_1 + 2 < x_2 \quad \checkmark$$

$$x_1 + 2x_2^2 \geq 4 \quad \times \quad x_1 + 2 \leq \sqrt{x_2} \quad \times \quad 2^{x_1} + x_2 = 5 \quad \times$$

Vektordarstellung

Wir können Variablen und Konstanten auch als Vektoren darstellen, also $x, c \in \mathbb{R}^n$, bzw. $x \in \mathbb{N}^n$.

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} : f(x) = c^T x = \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Beispiel

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} : c^T x = \begin{bmatrix} 3 & 2 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 3x_1 + 2x_2 + \frac{1}{2}x_3$$

(Integer) Lineare Programmierung

Definition

Ein **Lineares Programm** definiert ein **Optimierungsproblem** wie folgt:

- *Entscheidungsvariablen (decision variables)* $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$
- eine lineare *Optimierungsfunktion* $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ basierend auf den Entscheidungsvariablen wird minimiert (oder maximiert)
- Entscheidungsvariablen sind durch Lineare Ungleichungen oder Gleichungen *beschränkt (constraints)*
- Entscheidungsvariablen können *nicht-negativ* ($x_i \geq 0$) oder *unbeschränkt (ubs.)* sein

Hinweis: Gilt $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{N}^+$ sprechen wir von **Integer Linear Programming**

Lineares Bier

Beispiel

Nochmal zurück zu Bierbrauen. Wir schreiben das dazugehörige Lineare Programm wie folgt:

$$\begin{aligned}
 &\max_{x_1, x_2} && 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad &2x_1 + 1x_2 \leq 20 \\
 &1x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 &1x_1 + 1x_2 \leq 12 \\
 &x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

	Rohstoffverbrauch			Gewinn
	Hopfen	Malz	Hefe	
Ale x_1	2	1	1	3
Lager x_2	1	2	1	2
Max. Vorhanden	20	20	12	

Implikationen I

Proportionalität und Additivität

Lineare Optimierungsfunktion:

- Entscheidungsvariablen sind unabhängig voneinander
- ihr Beitrag ist proportional zu ihrem Koeffizienten

Lineare (Un-)Gleichungen:

- Beitrag von Entscheidungsvariablen ist jeweils proportional zu ihrem Koeffizienten
- Koeffizienten können aber für jede (Un-)Gleichung variieren
- dieser Koeffizient ist unabhängig des Wertes der Entscheidungsvariablen
- ausschließlich lineare Abhängigkeiten zwischen Entscheidungsvariablen

Implikationen 2

Zerteilbarkeit

Wir gehen davon aus, dass Lösungen aus beliebigen fraktionalen Teilen korrekt sind. In unserem Beispiel gehen wir also davon aus, dass nicht nur ganze Biere verkauft werden können.

Korrektheit

Die Lösung der Optimierung ist nur korrekt und entspricht der reellen Anwendung, wenn alle Parameter korrekt bestimmt werden können. Schwanken zum Beispiel die Rohstoffpreise oder ändert sich die Rezeptur je nach Qualität der Rohstoffe, ist die Lösung nicht allgemeingültig.

Ebene, Hyperebene, Halbraum

Definition

Die Euklidische **Ebene** $\mathbb{R}^n$ ist das Set aller möglichen n -Tupel reeller Zahlen:

$$\mathbb{R}^n := \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \mid x_i \in \mathbb{R}\}$$

Beispiel

Unser Beispiel ist in $\mathbb{R}^2$, da wir 2 Entscheidungsvariablen haben.

Ebene, Hyperebene, Halbraum

Definition

Ein **Halbraum** in $\mathbb{R}^n$ ist das Set aller n -Tupel in $\mathbb{R}^n$ für die eine Lineare Ungleichung (mit nicht-leeren Koeffizienten) gilt.

Definition

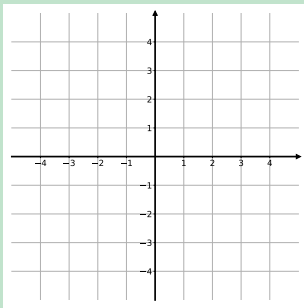
Ein **Hyperebene** in $\mathbb{R}^n$ ist das Set aller n -Tupel in $\mathbb{R}^n$ für die eine Lineare Gleichung (mit nicht-leeren Koeffizienten) erfüllt ist.



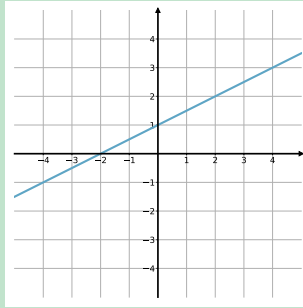
In welcher Relation stehen diese Definitionen zu Linearen Programmen?

Ebene, Hyperebene, Halbraum

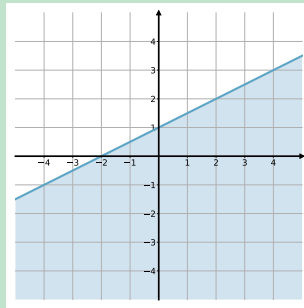
Beispiel



Ebene $\mathbb{R}^2$



Hyperebene $\mathbb{R}$



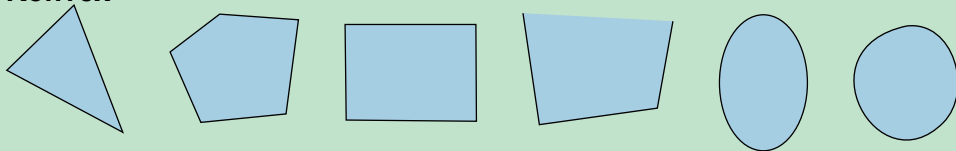
Halbraum $\subset \mathbb{R}^2$

Definition: Konvexität

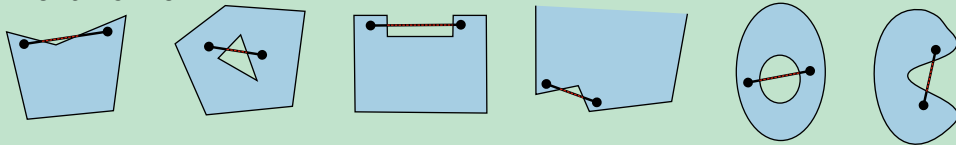
Eine Teilmenge $K \subset \mathbb{R}^n$ ist **konvex** wenn K leer oder ein einzelner Punkt ist, oder falls für jedes Paar $p, q \in K$ gilt, dass jeder Punkt in der Gerade von p nach q ebenfalls in K liegt.

Beispiel

Konvex



Nicht-Konvex

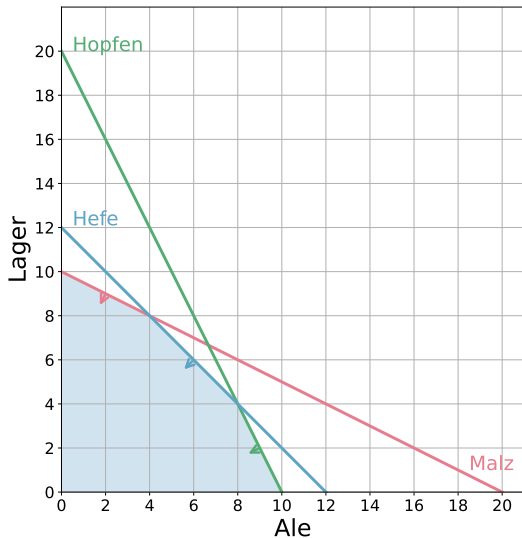


Beobachtungen:

- Sind $K_1, K_2, \dots, K_r$ konvex, dann ist auch $K := K_1 \cap K_2 \cap \dots \cap K_r$ konvex.
 - Ein Halbraum in $\mathbb{R}^n$ ist konvex.
 - Eine Hyperebene in $\mathbb{R}^n$ ist konvex.
- ⇒ die Schranken von Linearen Programmen definieren eine konvexe Menge

Bsp.:

- Hopfen: $2x_1 + 1x_2 \leq 20$
- Malz: $1x_1 + 2x_2 \leq 20$
- Hefe: $1x_1 + 1x_2 \leq 12$
- $x_1, x_2 \geq 0$

Mal wieder Bier:

Definition

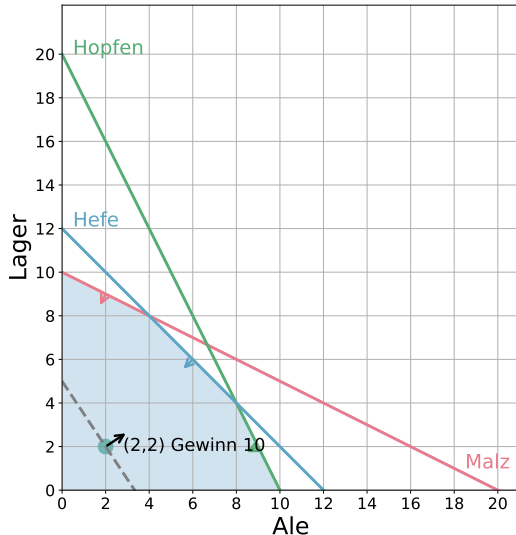
Die Menge der Punkte die alle Schranken eines Linearen Programms erfüllen wird als *zulässiger Bereich*, die *Menge Zulässiger Lösungen*, oder auch als *Lösungsraum* bezeichnet. Sie ergibt sich aus der Schnittmenge der Halbräume bzw. Hyperebenen.

Weitere Beobachtungen:

- der Lösungsraum jedes Linearen Programms ist konvex
- Geometrisch bilden die zulässigen Lösungen genauer ein konvexes Polytop

Definition

Die *optimale Lösung* des Linearen Programmes ist das Element der *Menge Zulässiger Lösungen*, mit dem kleinsten (respektive größten) Funktionswert der Optimierungsfunktion.



Beispiel

$x_1 = 2$ und $x_2 = 2$:

$$2 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 5 \leq 20 \quad \checkmark$$

$$1 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 5 \leq 20 \quad \checkmark$$

$$1 \cdot 2 + 1 \cdot 2 = 4 \leq 12 \quad \checkmark$$

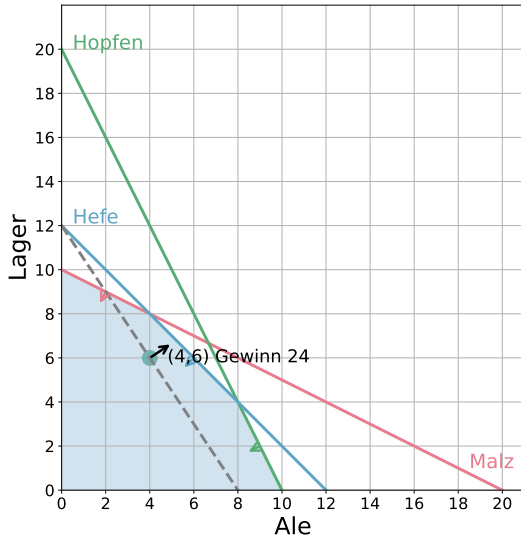
$$2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$2 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 2 + 2 \cdot 2 = 10$$

Anmerkung:

Die gestrichelte Linie zeigt $3x_1 + 2x_2 = 10$.
Die Richtung der Optimierung steht orthogonal dazu.



Beispiel

$x_1 = 4$ und $x_2 = 6$:

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 14 \leq 20 \quad \checkmark$$

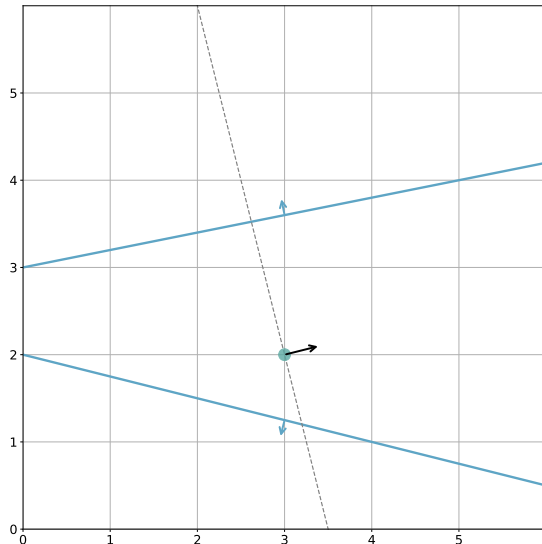
$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 16 \leq 20 \quad \checkmark$$

$$1 \cdot 4 + 1 \cdot 6 = 10 \leq 12 \quad \checkmark$$

$$4 \geq 0 \quad \checkmark$$

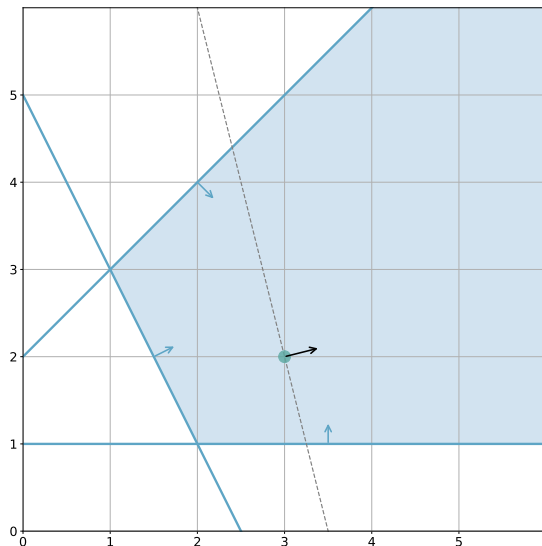
$$6 \geq 0 \quad \checkmark$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 24$$



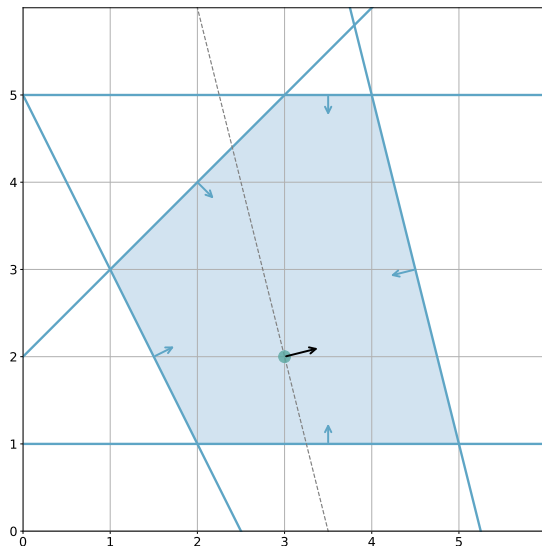
Anmerkung I:
Der Lösungsraum kann eine leere Menge sein.

Das Lineare Programm hat dann keine Lösung!

**Anmerkung II:**

Der Lösungsraum muss keine Beschränkte Menge definieren.

In diesem Fall kann die optimale Lösung unendlich sein.

**Anmerkung III:**

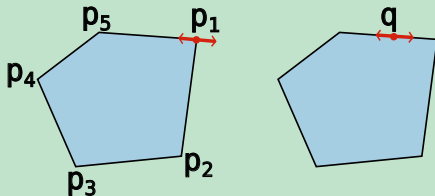
Ist der Lösungsraum (in Richtung der Optimierungsfunktion) beschränkt, existiert genau 1 optimale Lösung.

diese muss aber kein Punkt sein,
sondern kann eine konvexe Menge
sein

Definition: Ecke

Ein Element $x \in K$ eines konvexen Sets K wird als **Ecke (corner point)** bezeichnet, wenn $\nexists y \neq 0$, so dass $x + y \in K$ und $x - y \in K$. Mit anderen Worten, es existiert keine Gerade in K , für die x kein Endpunkt, sondern ein innenliegender Punkt, ist.

Beispiel



p_1, p_2, p_3, p_4 und p_5 sind Ecken. q ist jedoch keine Ecke.

Eckpunkt-Theorem (Corner Point Theorem)

Theorem

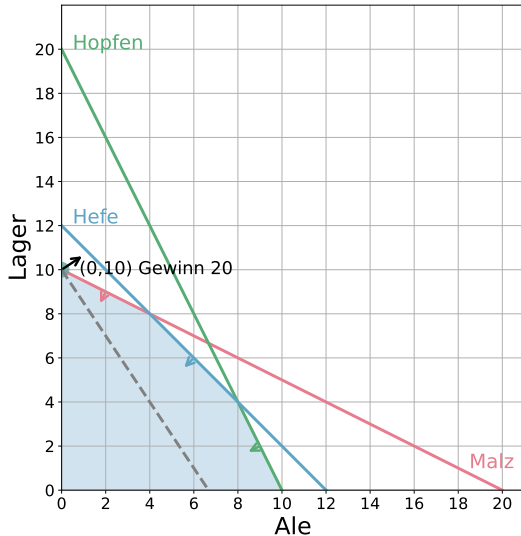
Gegeben ein lineares Programm mit der *Menge zulässiger Lösungen* K , dann:

- Ist K beschränkt, existiert eine optimale Lösung und sie liegt auf einer Ecke.
- Ist K nicht beschränkt, muss keine (endliche) Lösung existieren. Falls sie existiert liegt sie auf einer Ecke.

Ecken $\Leftrightarrow$ Mögliche Lösungen



Wir müssen “nur noch” alle Ecken bestimmen und berechnen.



Beispiel

$x_1 = 0$ und $x_2 = 10$:

$$2 \cdot 0 + 1 \cdot 10 = 10 \leq 20$$

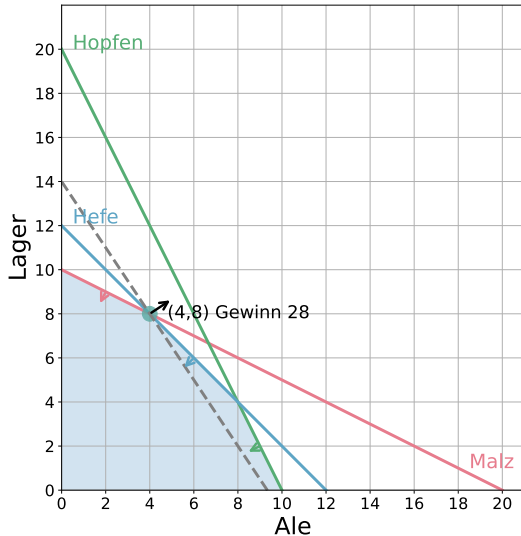
$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 10 = 20 \leq 20$$

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 10 = 10 \leq 12$$

$$4 \geq 0$$

$$6 \geq 0$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 0 + 2 \cdot 10 = 20$$



Beispiel

$x_1 = 4$ und $x_2 = 8$:

$$2 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 16 \leq 20$$

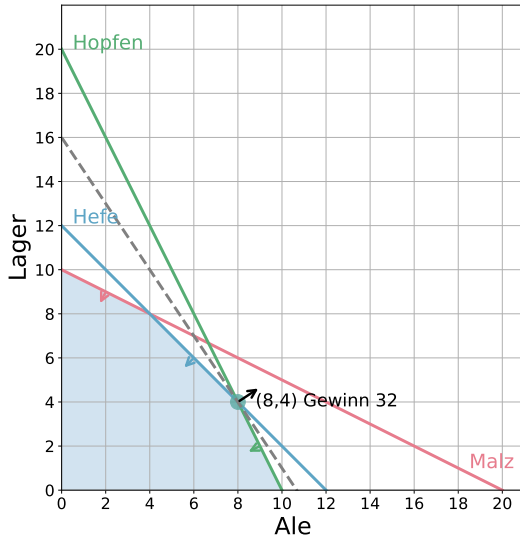
$$1 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 20 \leq 20$$

$$1 \cdot 4 + 1 \cdot 8 = 12 \leq 12$$

$$4 \geq 0$$

$$8 \geq 0$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 4 + 2 \cdot 8 = 28$$



Beispiel

$x_1 = 8$ und $x_2 = 4$:

$$2 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 20 \leq 20$$

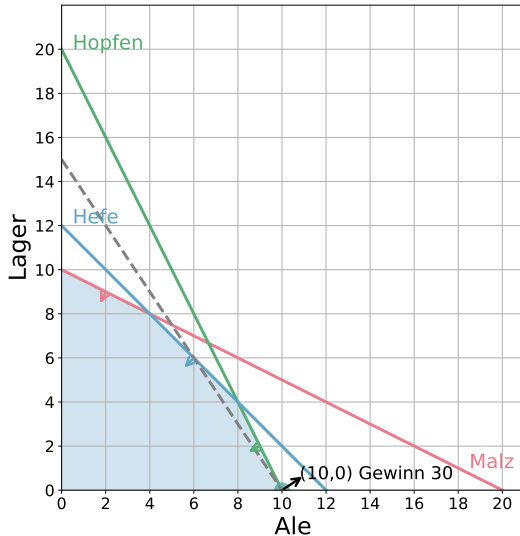
$$1 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 16 \leq 20$$

$$1 \cdot 8 + 1 \cdot 4 = 12 \leq 12$$

$$4 \geq 0$$

$$6 \geq 0$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 8 + 2 \cdot 4 = 32$$



Beispiel

$x_1 = 10$ und $x_2 = 0$:

$$2 \cdot 10 + 1 \cdot 0 = 20 \leq 20$$

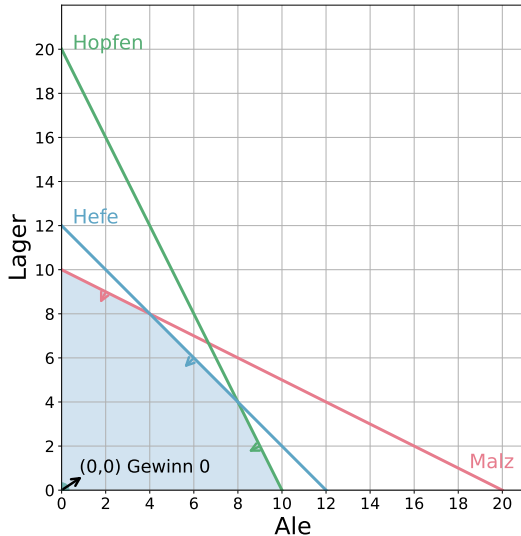
$$1 \cdot 10 + 2 \cdot 0 = 10 \leq 20$$

$$1 \cdot 10 + 1 \cdot 0 = 10 \leq 12$$

$$4 \geq 0$$

$$6 \geq 0$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 10 + 2 \cdot 0 = 30$$



Beispiel

$x_1 = 0$ und $x_2 = 0$:

$$2 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 20 \leq 20$$

$$1 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 10 \leq 20$$

$$1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 10 \leq 12$$

$$4 \geq 0$$

$$6 \geq 0$$

$$\text{Gewinn } 3 \cdot 0 + 2 \cdot 0 = 0$$

Standardform



Wie effizient ist dieser Ansatz? Für die Antwort überführen wir das lineare Programm in ein lineares Gleichungssystem!

Definition

Ein Lineares Programm ist in **Standardform**, wenn

- Alle rechtsseitigen Konstanten (b in unserer Definition) nicht-negativ sind.
- Alle Entscheidungsvariablen ($x_1, x_2, \dots, x_n$) nicht-negativ sind.
- Keine Ungleichungen, sondern nur Gleichungen als Schranken existieren.

Jedes Lineare Programm kann in Standardform überführt werden.

Algorithmus: Überführung in Standardform

Für jede (Un-)Gleichung:

- Ist die rechtsseitige Konstante negativ, multipliziere beide Seiten mit -1 .
Beachte: $\leq$ wird dabei zu $\geq$ und anders herum.
- Um Ungleichungen in Gleichungen umzuwandeln, muss die fehlende “Dimension” durch neue Variablen ausgeglichen werden.
 - $f(\cdot) \leq b$ und $b \geq 0$: Füge eine Slack-Variable s an, sodass $f(\cdot) + s = b$, $s \geq 0$
 - $f(\cdot) \geq b$ und $b \geq 0$: Füge eine Surplus-Variable e an, sodass $f(\cdot) - e = b$, $e \geq 0$
- Unbeschränkte Entscheidungsvariablen x_i , die auch negative Werte haben können, werden durch zwei nicht-negative Variablen ersetzt:
 - $x_{i1}, x_{i2} \geq 0$.
 - substituiere $x_i = x_{i1} - x_{i2}$

Beispiel

Erst ein komplexeres Beispiel:

$$\begin{aligned}
 &\max_{x_1, x_2} \quad x_1 + 2x_2 \\
 &\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_2 = 10 \\
 &\quad \quad 3x_1 - 4x_2 \leq -2 \\
 &\quad \quad 6x_1 - 3x_2 \leq 8 \\
 &\quad \quad x_1 \geq 0 \\
 &\quad \quad x_2 \text{ ubs}
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\max_{x_1, s_1, s_2, x_{21}, x_{22}} \quad x_1 + 2x_{21} - 2x_{22} \\
 &\text{s.t.} \quad 2x_1 + 3x_{21} - 3x_{22} = 10 \\
 &\quad \quad -3x_1 + 4x_{21} - 4x_{22} - s_1 = 2 \\
 &\quad \quad 6x_1 - 3x_{21} + 3x_{22} + s_2 = 8 \\
 &\quad \quad x_1, s_1, s_2, x_{21}, x_{22} \geq 0
 \end{aligned}$$

$$3x_1 - 4x_2 \leq -2 \xrightarrow{|\cdot -1} -3x_1 + 4x_2 \geq 2 \xrightarrow{s_1} -3x_1 + 4x_2 - s_1 = 2$$

$$6x_1 - 3x_2 \leq 8 \xrightarrow{s_2} 6x_1 - 3x_2 + s_2 = 8$$

Substituiere $x_2 = x_{21} - x_{22}$

Beispiel

Das Bier Beispiel ist etwas simpler:

$$\begin{aligned}
 &\max_{x_1, x_2} && 3x_1 + 2x_2 \\
 &\text{s.t.} && 2x_1 + 1x_2 \leq 20 \\
 &&& 1x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 &&& 1x_1 + 1x_2 \leq 12 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 &\max_{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3} && 3x_1 + 2x_2 \\
 &\text{s.t.} && 2x_1 + 1x_2 + s_1 = 20 \\
 &&& 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 \\
 &&& 1x_1 + 1x_2 + s_3 = 12 \\
 &&& x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$2x_1 + 1x_2 \leq 20 \xrightarrow{s_1} 2x_1 + 1x_2 + s_1 = 20$$

$$1x_1 + 2x_2 \leq 20 \xrightarrow{s_2} 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 20$$

$$1x_1 + 1x_2 \leq 12 \xrightarrow{s_3} 1x_1 + 1x_2 + s_3 = 12$$

Matrixdarstellung

Ein Lineares Programm mit m
Gleichungen und n Variablen in
Standardform

$$\begin{aligned}
 \min / \max \quad & c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \\
 \text{s.t.} \quad & a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n = b_1 \\
 & a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + \dots + a_{2n} x_n = b_2 \\
 & \dots \\
 & a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + \dots + a_{mn} x_n = b_m \\
 & x_1, x_2, \dots, x_n \geq 0
 \end{aligned}$$

hat die Matrix Form

$$\max \{c^T x : Ax = b, x \geq 0\}$$

$$A := \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad c := \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \dots \\ c_n \end{bmatrix} \quad b := \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Bier-Matrix

Beispiel

$$\begin{aligned}
 & \max_{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3} \quad 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 1x_2 + s_1 = 20 \\
 & 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 \\
 & 1x_1 + 1x_2 + s_3 = 12 \\
 & x_1, x_2, s_1, s_2, s_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

$$\max [3 \quad 2 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ 20 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Effiziente Algorithmen



Wann hat ein lineares Gleichungssystem eine Lösung?

- exakte Antwort führt zu weit für diese Vorlesung ($\rightarrow$ Lineare Algebra)
 - grob wenn: # linear unabhängiger Gleichungen $\leq$ # Variablen
 - wir gehen davon aus, dass alle Schranken linear unabhängig sind (ansonsten können betroffene Schranken entfernt werden)
- $\Rightarrow$ wir nehmen daher an $n \geq m$ (Erinnerung: m Gleichungen und n Variablen)

Es gibt immer noch $\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$ Ecken die getestet werden müssen...



Simplex Algorithmus: Wähle eine Lösung (Ecke), wandere entlang der Kanten des Lösungsraums zur je besten lokalen Lösung (Ecken) und verbessere so schrittweise die globale Lösung.

Initiale Lösung

Definition

Eine **Initiale Lösung** wird erzeugt, in dem $n - m$ Variablen (Nicht-Basis-Variablen **NBV**) auf 0 gesetzt werden. Die restlichen m Variablen (Basis Variablen **BV**) werden durch das Gleichungssystem eindeutig bestimmt.

- Werte der Basis Variablen BV können z.B. über das gaußsche Eliminationsverfahren bestimmt werden
- nicht jede Wahl der Nicht-Basis-Variablen NBV hat eine zulässige Lösung
- d.h. Lösungen haben negative Variablen
- Aber wenn eine zulässige Lösung existiert ist diese eine Ecke!

Zulässige Initiale Lösung

Definition

Eine Initiale Lösung wird *zulässig*, wenn alle BV nicht-negativ sind, also $\forall x \in BV : x \geq 0$.

Beispiel

$$3x_1 + x_2 = 3$$

$$x_2 - 2x_3 = 2$$

NBV	BVs	Initiale Lösung	zulässig
x_1	x_2, x_3	$x_1 = 0, x_2 = 3, x_3 = \frac{1}{2}$	✓
x_2	x_1, x_3	$x_1 = 1, x_2 = 0, x_3 = -1$	✗
x_3	x_1, x_2	$x_1 = \frac{1}{3}, x_2 = 2, x_3 = 0$	✓



Wie können wir die NBV effizient wählen?

Beobachtungen:

- pro Zeile/Schranke muss eine BV eindeutig bestimmt werden
- ähnliche zur Stufenform bei gaußscher Elimination
- Slack Variablen kommen nur in einer Gleichung vor
- und können nur nicht-negative besetzt werden wenn alle originalen Variablen NBV sind
- hat das LP nur Ungleichungen mit $\leq$:
 - ⇒ jede Gleichung hat eine Slack Variable in Standardform
 - ⇒ jede Slack Variable wird BV, alle originalen Variablen in NBV
 - ⇒ m BVs und $n - m$ NBVs
 - ⇒ eine zulässige Initiale Lösung ist garantiert
- für alle anderen Fälle wird es komplizierter...
- auch Slack Variablen sind dann nicht sicher
- ⇒ Sets von NBVs testen bis eine zulässige Lösung gefunden wurde

Beispiel

$$n = 5, m = 3 \Rightarrow n - m = 5 - 3 = 2 \text{ NBVs}$$

für unser Bier Beispiel

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2, s_1, s_2, s_3} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 1x_2 + s_1 = 20 \\ & 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 \\ & 1x_1 + 1x_2 + s_3 = 12 \end{aligned}$$

NBVs	BVs	Initiale Lösung	Zul.	z
x_1, x_2	s_1, s_2, s_3	$s_1 = 20, s_2 = 20, s_3 = 12$	✓	0
s_1, s_2	s_3, x_1, x_2	$x_1 = \frac{20}{3}, x_2 = \frac{20}{3}, s_3 = -\frac{4}{3}$	✗	-
s_2, s_3	s_1, x_1, x_2	$x_1 = 4, x_2 = 8, s_1 = 4$	✓	28
s_1, s_3	s_2, x_1, x_2	$x_1 = 8, x_2 = 4, s_2 = 4$	✓	32
x_1, s_1	x_2, s_2, s_3	$x_2 = 20, s_2 = -20, s_3 = -8$	✗	-
x_1, s_2	x_2, s_1, s_3	$x_2 = 10, s_1 = 10, s_3 = 2$	✓	20
x_1, s_3	x_2, s_1, s_2	$x_2 = 12, s_1 = 8, s_2 = -4$	✗	-
x_2, s_1	x_1, s_2, s_3	$x_1 = 10, s_2 = 10, s_3 = 2$	✓	30
x_2, s_2	x_1, s_1, s_3	$x_1 = 20, s_1 = -20, s_3 = -8$	✗	-
x_2, s_3	x_1, s_1, s_2	$x_1 = 12, s_1 = -4, s_2 = 8$	✗	-

Die Wahl aller Slack Variablen s_1, s_2, s_3 führt trivial zur einer initialen zulässigen Lösung, wenn auch einer schlechten.

Andere Belegungen liefern uns alle anderen Ecken des Polytops.

Simplex Tableau

Definition

Ein Lineares Programm in Standardform kann über seine Matrix-Darstellung auch als **Tableau** dargestellt werden:
$$\begin{bmatrix} 1 & -c^T & 0 \\ 0 & A & b \end{bmatrix}$$

Das Tableau macht die Berechnung etwas anschaulicher.

Transformation für eine initiale zulässige Lösung.

Schritt 1:

- c_B der Vektor der Koeffizienten der BVs
- c_N der Vektor der Koeffizienten der NBVs
- I Einheitsmatrix
- $[DI]$, durch Zeilenaddition erzeugte Partition von A

$$\begin{bmatrix} 1 & -c_N^T & -c_B^T & 0 \\ 0 & D & I & b \end{bmatrix}$$

Hinweis: Spalten und Zeilen können frei getauscht werden

Schritt 2:

Eliminiere $\bar{c}_B^T$ durch Zeilenaddition!

$$\begin{bmatrix} 1 & -\bar{c}_N^T & 0 & z_B \\ 0 & D & I & b \end{bmatrix}$$

$\bar{c}_N^T$ und z_b Ergebnis der Zeilenaddition

Beispiel

$$\begin{aligned} \max_{x_1, x_2} \quad & z = 3x_1 + 2x_2 \\ \text{s.t.} \quad & 2x_1 + 1x_2 + s_1 = 20 \\ & 1x_1 + 2x_2 + s_2 = 20 \\ & 1x_1 + 1x_2 + s_3 = 12 \end{aligned}$$

z	x_1	x_2	s_1	s_1	s_1	b
1	-3	-2	0	0	0	0
0	2	1	1	0	0	20
0	1	2	0	1	0	20
0	1	1	0	0	1	12

NBVs: x_1, x_2 ; BVs: s_1, s_2, s_3

Eine initiale zulässige Lösung aus Slack Variablen ist immer bereits in der richtigen Form.

Jetzt kann der Simplex Algorithmus angewendet werden!

Simplex Algorithmus

Definition

In einem Linearen Programm mit m Gleichungen sind zwei zulässige Lösung *benachbart*, wenn die Sets der zugehörigen BVs $m - 1$ Variablen gemeinsam haben.

Geometrisch Interpretiert:

- jede zulässige Lösung entspricht einer Ecke
- benachbarte Lösung teilen eine Kante des Polytops

Algorithmus: Simplex Idee

- bestimme eine zulässige initiale Lösung
- bis Lösung optimal:
 - für jedes Paar $x \in BV$ und $y \in NBV$
 - bestimme Verbesserung der Lösung bei Tausch von x und y , also
 $BV := BV \setminus \{x\} \cup \{y\}$ und $NBV := NBV \setminus \{y\} \cup \{x\}$
 - führe besten Tausch aus

Simplex Algorithmus

1. Konvertiere LP in Tableau-Form
2. Bestimme eine zulässige initiale Lösung. Transformiere Tableau entsprechend.
3. gilt $\bar{c}_i \geq 0$ (Maximierung) / $\bar{c}_i \leq 0$ (Minimierung) für alle $c_i \in \bar{c} \Rightarrow$ Optimale Lösung gefunden
sonst: wähle kleinstes / größtes $\bar{c}_i$
4. finde Zeile k mit $\bar{a}_{ki} > 0$ und kleinstem Quotienten $\frac{\bar{b}_k}{\bar{a}_{ki}}$
5. durch Zeilenaddition von Reihe k mit allen Reihen
 - eliminiere $\bar{c}_i$
 - eliminiere $\bar{a}_{ji} \forall j \neq k$ (für alle Zeilen außer k)
 - erzeuge $\bar{a}_{ji} = 1$
6. Gehe zu Schritt 3

Anmerkungen: in Schritt 5 tauscht Variable i von NBV zu BV und Variable k von BV zu NBV

Beispiel

NBVs: x_1, x_2 ; BVs: s_1, s_2, s_3

Reihe	BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	-3	-2	0	0	0	0	
I	s_1	0	2	1	1	0	0	20	$\frac{20}{2} = 10$
II	s_2	0	1	2	0	1	0	20	$\frac{20}{1} = 20$
III	s_3	0	1	1	0	0	1	12	$\frac{12}{1} = 12$

$$\Rightarrow Z = Z + \frac{3}{2} I$$

$$\Rightarrow$$

Reihe	BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	s_1	0	2	1	1	0	0	20	
II	s_2	0	1	2	0	1	0	20	
III	s_3	0	1	1	0	0	1	12	

(wir transformieren x_1 schrittweise zu $(0, 1, 0, 0)^T$ mittels Zeilenaddition zu I)

Beispiel

Reihe	BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	s_1	0	2	1	1	0	0	20	
II	s_2	0	1	2	0	1	0	20	
III	s_3	0	1	1	0	0	1	12	

$$\Rightarrow \text{II} = \text{II} - \frac{1}{2} \text{I}$$

$$\Rightarrow$$

Reihe	BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	s_1	0	2	1	1	0	0	20	
II	s_2	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	
III	s_3	0	1	1	0	0	1	12	

Beispiel

Reihe	BV	z	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	s ₁	0	2	1	1	0	0	20	
II	s ₂	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	
III	s ₃	0	1	1	0	0	1	12	

$$\Rightarrow \text{III} = \text{III} - \frac{1}{2} \text{I}$$

 $\Rightarrow$

Reihe	BV	z	x ₁	x ₂	s ₁	s ₂	s ₃	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	s ₁	0	2	1	1	0	0	20	
II	s ₂	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	
III	s ₃	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	

Beispiel

Reihe	BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	s_1	0	2	1	1	0	0	20	
II	s_2	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	
III	s_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	

$$\Rightarrow I = \frac{1}{2} I$$

$$\Rightarrow$$

Reihe	BV	z	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	30	
I	x_1	0	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	10	
II	s_2	0	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1	0	10	
III	s_3	0	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	

(Optional: ordne Spalten um wieder $[DI]$ Form zu erhalten)

Beispiel

NBVs: x_2, s_1 ; BVs: x_1, s_2, s_3

Reihe	BV	z	x_2	s_1	x_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	0	0	30	
I	x_1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1	0	0	10	$\frac{10}{1/2} = 20$
II	s_2	0	$\frac{3}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	1	0	10	$\frac{10}{3/2} = \frac{20}{3}$
III	s_3	0	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	2	$\frac{2}{1/2} = 4$

$\Rightarrow$

$$\begin{aligned}
 Z &= Z + III \\
 I &= I - III \\
 II &= II - 3 III \\
 III &= 2 III
 \end{aligned}$$

$\Rightarrow$

Reihe	BV	z	x_2	s_1	x_1	s_2	s_3	b	$\bar{b}_k/\bar{a}_{ki}$
Z		1	0	1	0	0	1	32	
I	x_1	0	0	1	1	0	-1	8	
II	s_2	0	0	1	0	1	-3	4	
III	x_2	0	1	-1	0	0	2	4	

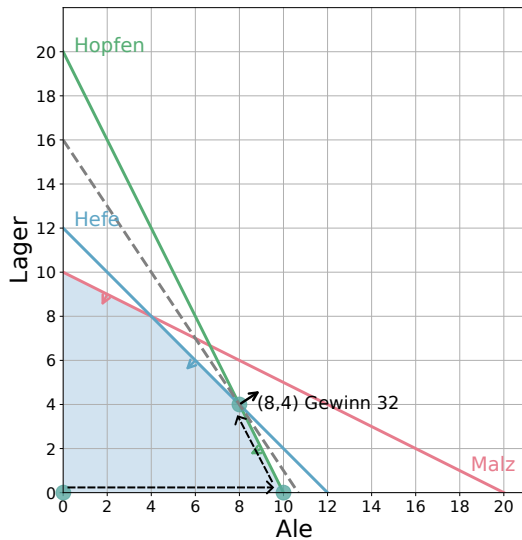
Beispiel

Reihe	BV	z	s ₃	s ₁	x ₁	s ₂	x ₂	b	$\bar{b}_k / \bar{a}_{ki}$
Z		1	1	1	0	0	0	32	
I	x ₁	0	-1	1	1	0	0	8	
II	s ₂	0	-3	1	0	1	0	4	
III	x ₂	0	2	-1	0	0	1	4	

Alle Variablen in Z sind nicht-negativ. Die Optimale Lösung ist erreicht.

Lösung:

- BVs: $x_1 = 8$, $s_2 = 4$, $x_2 = 4$
- NBVs: $s_1 = 0$, $s_3 = 0$
- Optimaler Gewinn $z = 32$



Dual eines Linearen Programms

Definition

Jedes Lineare Programm definiert ein **duales** Lineares Programm wie folgt:

- jede Variable definiert eine Schranke im Dual
- jede Schranke definiert eine Variable im Dual
- die Optimierungsfunktion wird invertiert (Max $\Leftrightarrow$ Min)

Das originale Problem wird in diesem Zusammenhang als primales Problem bezeichnet.

In Matrix-Standardform:

Primal $\max \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow$ Dual $\min \{b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0\}$

- Koeffizienten: Spalte $\Leftrightarrow$ Reihe
- Variablen/Schranken: folge Tabelle

max	$\Leftrightarrow$	min
Schranke		Variable
$\geq$	$\Leftrightarrow$	≤ 0
$\leq$	$\Leftrightarrow$	≥ 0
$=$	$\Leftrightarrow$	ubs.
Variable		Schranke
≤ 0	$\Leftrightarrow$	$\leq$
≥ 0	$\Leftrightarrow$	$\geq$
ubs.	$\Leftrightarrow$	$=$

Beispiel

$$\begin{array}{ll}
 \max_{x_1, x_2, x_3} & z = 4x_1 - 1x_2 + 2x_3 \\
 \text{s.t.} & \begin{array}{llll}
 1x_1 + 1x_2 & \leq & 5 \\
 2x_1 + 1x_2 & \leq & 7 \\
 & 2x_2 + 1x_3 & \geq & 6 \\
 1x_1 & + 1x_3 & = & 4
 \end{array} \\
 & x_1 \geq 0 \\
 & x_2, x_3 \text{ ubs.}
 \end{array}
 \Leftrightarrow
 \begin{array}{ll}
 \min_{y_1, y_2, y_3, y_4} & w = 5y_1 + 7y_2 + 6y_3 + 4y_4 \\
 \text{s.t.} & \begin{array}{llll}
 1y_1 + 2y_2 & + 1y_4 & \geq & 4 \\
 1y_1 + 1y_2 + 2y_3 & & = & -1 \\
 & 1y_3 + 1y_4 & = & 2
 \end{array} \\
 & y_1, y_2 \geq 0 \\
 & y_3 \leq 0 \\
 & y_4 \text{ ubs.}
 \end{array}$$

$$\text{Primal max } \{c^T x : Ax \leq b, x \geq 0\} \Leftrightarrow \text{Dual min } \{b^T y : A^T y \geq c, y \geq 0\}$$

Zusammenhang Primal und Dual

Theorem: Schwache Dualität

Sei x eine zulässige Lösung des Primals und y eine zulässige Lösung des Duals, dann gilt:

$$c^T x \leq y^T A x \leq b^T$$

Theorem: Starke Dualität

Hat das Primal oder das Dual eine endliche optimale Lösung, hat das jeweilig andere Problem auch eine endliche optimale Lösung und die Lösungen sind identisch, also $c^T x = b^T y$.

Primal Optimal	$\Leftrightarrow$	Dual Optimal
Primal Unbeschränkt	$\Rightarrow$	Dual hat keine Lösung
Dual Unbeschränkt	$\Rightarrow$	Primal hat keine Lösung

Warum interessiert uns das Dual? Rohstoffkosten

Das Dual bietet uns eine wirtschaftliche Interpretation des Gewinns wenn wir nur die Rohstoffe unverändert weiter verkaufen.

$$\begin{aligned}
 &\max_{x_1, x_2} && 3x_1 + 2x_2 \\
 \text{s.t.} &&& 2x_1 + 1x_2 \leq 20 \\
 &&& 1x_1 + 2x_2 \leq 20 \\
 &&& 1x_1 + 1x_2 \leq 12 \\
 &&& x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

(x produzierte Einheiten)

Maximiere Gewinn durch Produktion

$$\begin{aligned}
 &\min_{y_1, y_2, y_3} && 20y_1 + 20y_2 + 12y_3 \\
 \text{s.t.} &&& 2y_1 + y_2 + y_3 \geq 3 \\
 &&& y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\
 &&& y_1, y_2, y_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

(y Preis pro Einheit Rohstoff)

**Minimiere Preis für Rohstoffe bei
gleichem Gewinn**

Warum interessiert uns das Dual? Flüsse!

Erinnerung Flüsse:

- Graph $G = (V, E)$, mit Flussnetzwerk $F = (G, c, s, t)$
- *Konservierung*: Bis auf Quelle s und Senke t muss der Zufluss in jedem Knoten gleich dem Abfluss sein
- *Zulässigkeit*: Der Fluss entlang jeder Kante überschreitet die vorgegebene Kapazitätsgrenze c nicht

Finde den Maximalen Fluss über Lineares Programm:

$$\begin{aligned}
 & \max_{f \in \mathbb{R}^{|E|}} \sum_{(s,j) \in E} f_{sj} \\
 \text{s.t.} \quad & f_{ij} \geq 0, f_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\
 & \sum_{(i,k) \in E} f_{ik} = \sum_{(k,j) \in E} f_{kj} \quad \forall k \in V \setminus \{s, t\}
 \end{aligned}$$

Min Cut Max Flow Dual

Bestimme nun das Dual...

$$\begin{aligned}
 & \max_{f \in \mathbb{R}^{|E|}} \sum_{(s,j) \in E} f_{sj} \\
 \text{s.t.} \quad & f_{ij} \geq 0, f_{ij} \leq c_{ij} \quad \forall (i,j) \in E \\
 & \sum_{(i,k) \in E} f_{ik} = \sum_{(k,j) \in E} f_{kj} \quad \forall k \in V \setminus \{s, t\}
 \end{aligned}$$

(f Fluss)
Maximaler Fluss

$$\begin{aligned}
 & \min_{b \in \mathbb{R}^{|E|}, x \in \mathbb{R}^{|V|}} \sum_{(i,j) \in E} b_{ij} c_{ij} \\
 \text{s.t.} \quad & b_{ij} + x_j - x_i \geq 0 \quad \forall (i,j) \in E \\
 & b \geq 0 \\
 & x_s = 1 \\
 & x_t = 0
 \end{aligned}$$

(b Kanten im Cut, x zu welchem Set gehört der Knoten)
Minimaler Schnitt