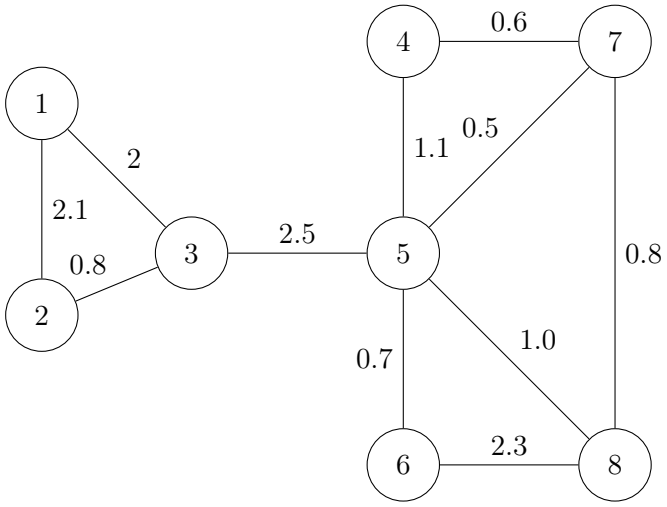
Algorithmen und Datenstrukturen II
WiSe 2026/27 – Serie 1

1 Ungerichtete Graphen

Gegeben sei der folgende ungerichtete gewichtete Graph G.



a) Finden Sie einen minimalen Spannbaum von G mit dem Algorithmus von Kruskal (vgl. ADS2-V1 Folie 17ff). Geben Sie die nach Gewichten sortierte Liste L der Kanten aus und schreiben Sie die Kanten des Baums in der Reihenfolge hin, in der sie hinzugefügt werden. Wenn eine Kante aus L nicht in den Spannbaum aufgenommen wird, so geben Sie den bereits im Spannbaum enthaltenen Pfad an, der die beiden Knoten der Kante verbindet (z.B. Kante $\{1, 3\}$ könnte durch den Pfad $1 \to 2 \to 3$ schon enthalten sein).

b) Ist der in Aufgabenteil a) gefundene minimale Spannbaum eindeutig? Falls ja: begründen Sie dies. Falls nein: wieviele minimale Spannbäume hat G?

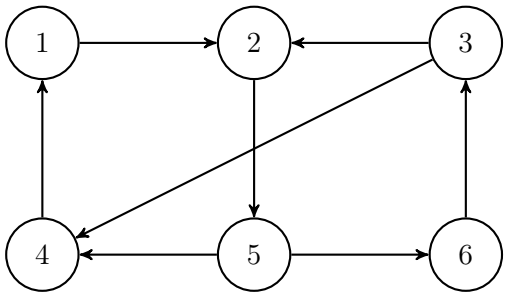
c) Der Algorithmus von Kruskal werde auf einen nicht-zusammenhängenden gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$ mit $n = |V|$ Knoten angewendet und liefere eine Kantenmenge T mit $r = |T|$ Kanten. Ist (V, T) ein Spannbaum von G? Begründen Sie ihre Aussage. Welche Information über G entnehmen Sie r und n?

d) Betrachten Sie nun einen allgemeinen gewichteten Graphen $G = (V, E, w)$, einen minimalen Spannbaum (V, T) von G und einen Zyklus C auf G. Sei e eine Kante von C mit strikt maximalem Gewicht. Für alle Kanten $f \in C$, $f \neq e$, gelte also $w(f) < w(e)$. Zeigen Sie: $e \notin T$.

e) Formulieren sie ein möglichst einfaches hinreichendes Kriterium dafür, dass der minimale Spannbaum eindeutig ist. Geben sie ein möglichst kleines Beispiel, dass ihr Kriterium nicht notwendig ist. Letzteres heißt, dass es einen eindeutigen min. Spannbaum geben kann, ohne dass ihr Kriterium erfüllt ist.

2 Gerichtete Graphen

Ein gerichteter Graph sei wie folgt gegeben:



a) Geben sie die Kantenliste des Graphen an.

b) Geben sie die Knotenliste des Graphen an.

c) Geben sie die Adjazenzmatrix des Graphen an.

d) Beschreiben sie kurz wie sich Ausgangs- und Eingangsgrad der jeweiligen Knoten mit Hilfe der Adjazenzmatrix bestimmen lassen.

e) Besitzt dieser Graph einen Hamiltonschen Zyklus? Falls ja: Geben Sie einen an. Falls nein: Begründen Sie dies möglichst kurz.

f) Betrachten Sie die Knotenfolgen

(3,2,5,6,3,4), (2,5,4,1,2,5,6), (3,4,1,2,5,6,3), (1,2,3,4)

Geben Sie zu jeder Knotenfolge an, ob sie für den gegebenen Graphen

- eine Kantenfolge
- ein Kantenzug
- ein Pfad
- ein Zyklus

ist.

g) Betrachten den folgenden durch seine Kantenliste gegebenen Graphen:

$$G = \quad 5, \quad 6, \quad 1,2, \ 1,4, \ 1,3, \ 3,5, \ 4,2, \ 4,5,$$

Geben Sie für jeden der folgenden Graphen G', G'' und G''' an, ob dieser für G ein

- Teilgraph
- aufspannender Teilgraph
- induzierter Teilgraph

ist.

$$G' = \quad 4, \quad 4, \quad 1,2,\ 1,4,\ 4,2,\ 4,5,$$

$$G'' = \quad 5, \quad 5, \quad 1,2,\ 1,4,\ 1,5,\ 4,2,\ 4,5,$$

$$G''' = \quad 5, \quad 4, \quad 1,2,\ 1,4,\ 3,5,\ 4,5,$$