

Universität Leipzig Institut für Informatik Bioinformatik/IZBI	Algorithmen und Datenstrukturen II WiSe 2026/27 – Freiwillige Serie 3		
P.F. Stadler, T. Gatter			Seite 1/5

Algorithmen und Datenstrukturen II

WiSe 2026/27 – Serie 3

1 Starke Zusammenhangskomponenten

Der gerichtete Graph G sei durch die folgende Kantenliste definiert.

6, 8, 1, 2, 2, 3, 3, 1, 3, 4, 3, 6, 4, 5, 5, 4, 1, 6

- a) Benutzen sie den Tarjan-Algorithmus (wie in der Vorlesung beschrieben) beginnend beim Knoten 1, um die starken Zusammenhangskomponenten von G zu berechnen. In der FOREACH-Schleife innerhalb von Tarjan-visit werden die Kindknoten u des aktuellen Knotens v in aufsteigender Reihenfolge der Indizes bearbeitet. Geben sie in der Reihenfolge der Abarbeitung des Algorithmus an:
- jeweils nach Beendigung der FOREACH Schleife: v , $\text{in}[v]$ und $\text{l}[v]$
 - die jeweiligen Ausgaben der starken Zusammenhangskomponenten.

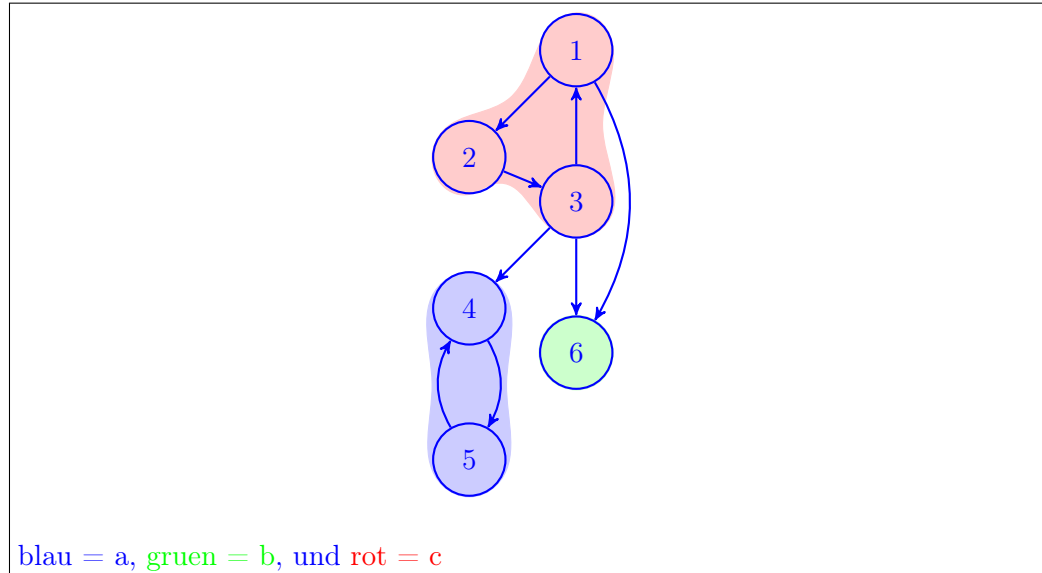
Lösung:

v	$\text{in}[v]$	$\text{l}[v]$	Ausgabe
5	5	4	
4	4	4	st. Zshk: 5,4
6	6	6	st. Zshk: 6
3	3	1	
2	2	1	
1	1	1	st. Zshk: 3, 2, 1

- b) Zeichnen sie G und dessen Komponentengraphen G^* . Benennen sie dabei die starken Zusammenhangskomponenten von G mit $a, b, \dots$, in der Reihenfolge, in der sie vom Tarjan-Algorithmus im vorigen Aufgabenteil ausgegeben werden.

Universität Leipzig Institut für Informatik Bioinformatik/IZBI	Algorithmen und Datenstrukturen II WiSe 2026/27 – Freiwillige Serie 3		
P.F. Stadler, T. Gatter			Seite 2/5

Lösung:



2 Mengensysteme

a) Gegeben sind die Menge $E = \{a, b, c, d\}$ und die folgenden Mengen von Mengen:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_1 &= \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, b\}, \{c, d\} \} \\
 \mathcal{M}_2 &= \{ \emptyset, \{a\}, \{b, e\}, \{c\}, \{d\}, \{a, d, e\} \} \\
 \mathcal{M}_3 &= \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{d\}, \{a, b\}, \{a, d\} \} \\
 \mathcal{M}_4 &= \{ \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a, b\}, \{b, c\} \} \\
 \mathcal{M}_5 &= \{ \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{d\}, \{a, c\}, \{a, d\} \}
 \end{aligned}$$

Geben Sie für jedes $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ an, ob $(E, \mathcal{M}_i)$ ein Mengensystem, ein Unabhängigkeitssystem, ein Matroid ist. Fassen Sie Ihr Ergebnis in Form einer Tabelle mit Einträgen ja/nein zusammen, wobei jedes i eine Spalte und jede der drei Eigenschaften eine Zeile bekommt. Begründen Sie kurz wenn die Eigenschaft nicht gilt (also ein nein eingetragen wird).

Universität Leipzig Institut für Informatik Bioinformatik/IZBI	Algorithmen und Datenstrukturen II WiSe 2026/27 – Freiwillige Serie 3		
P.F. Stadler, T. Gatter			Seite 3/5

Lösung:

i	1	2	3	4	5
Mengensystem	ja	nein ²	ja	ja	ja
Unabh.System	ja	nein ³	ja	nein ⁵	ja
Matroid	nein ¹	nein ⁴	ja	nein ⁶	nein ⁷

¹ $|\{a, b\}| > |\{c\}|; \{a, b\} \setminus \{c\} = \{a, b\} \rightarrow \nexists x \in \{a, b\}$ so dass gilt $x \cup \{c\} \in M_1$
² $e \notin E$
³ kein Mengensystem
⁴ kein Unabh.System
⁵ $\emptyset \notin \mathcal{M}_4$
⁶ kein Unabh.System
⁷ $|\{a, d\}| > |\{b\}|; \{a, d\} \setminus \{b\} = \{a, d\} \rightarrow \nexists x \in \{a, d\}$ so dass gilt $x \cup \{b\} \in M_1$

- b) Geben Sie für die Fälle aus (a), in denen ein Unabhängigkeitssystem, aber kein Matroid vorliegt, eine Gewichtsfunktion an, bei der der kanonische Greedy-Algorithmus aus der Vorlesung keine optimale Lösung findet. Die Gewichtsfunktion soll nur Werte in $\{1, 2, 3, 4\}$ annehmen.

Lösung:

Fälle 1 und 5. Es gibt mehrere korrekte Lösungen, aber es geht immer so:				
1) von den beiden 2-er Mengen ist die, die das Element mit höchstem Gewicht enthält, schlechter als die andere.				
5) Menge $\{b\}$ hat höchstes Element-Gewicht, aber eine der 2-er Mengen ist besser				
Zum Beispiel	i	$w(a)$	$w(b)$	$w(c)$ $w(d)$
	1	4	1	3 3
	5	3	4	3 3

3 Auftragsplanungsmatroid

- a Ermitteln Sie für das folgende Auftragsproblem die optimale Lösung mittels des in den Vorlesungsfolien beschriebenen Kanonischen Greedy-Algorithmus.

Der Zeitbedarf für jeden Auftrag beträgt einen Tag. Die folgende Tabelle fasst die Aufträge, deren Gewinn und den Abgabetermin zusammen.

Universität Leipzig Institut für Informatik Bioinformatik/IZBI	Algorithmen und Datenstrukturen II WiSe 2026/27 – Freiwillige Serie 3		
P.F. Stadler, T. Gatter			Seite 4/5

Auftrag x	Gewinn $w(x)$	Termin $d(x)$
a	12	1
b	6	2
c	4	2
d	3	3
e	9	2
f	2	1

Lösung:

Aufträge sortiert nach w , notiert in der form $(x, [d(x), w(x)])$
 $(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (b, [2, 6]), (c, [2, 4]), (d, [1, 3]), (f, [1, 2])$.
 Greedy-Aufbau von A
 $A = \emptyset$
 $A = \{(a, [1, 12])\}$... ist $A \in \mathcal{M}$? ... ja!
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9])\}$... ist $A \in \mathcal{M}$? ... ja!
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (b, [2, 6])\}$... ist $A \in \mathcal{M}$? ... NEIN!
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9])\}$ behalten
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (c, [2, 4])\}$... ist $A \in \mathcal{M}$? ... NEIN!
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9])\}$ behalten
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (d, [3, 3])\}$... ist $A \in \mathcal{M}$? ... ja!
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (d, [3, 3]), (f, [1, 2])\}$... ist $A \in \mathcal{M}$? ... NEIN!
 fertig
 $A = \{(a, [1, 12]), (e, [2, 9]), (d, [3, 3])\}$ mit einem Gesamtgewinn von 24

- b) Zeigen Sie, dass im Auftragsplanungsproblem – für beliebige Auftragsmengen E und Fristen d – das Mengensystem $(E, \mathcal{M})$ ein Matroid ist.

Hinweis: Verwenden sie dazu, dass (laut Vorlesung) im Auftragsproblem eine Auftragsmenge A zulässig ist (d.h. in $\mathcal{M}$ enthalten ist) genau dann wenn

$$\forall s \in \mathbb{N} : |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s. \quad (*)$$

(bzw. ausformuliert: “eine Auftragsmenge ist zulässig, genau dann wenn sie (für jede beliebige Anzahl von Tagen s) höchstens s Aufträge enthält, die alle nach spätestens s Tagen fertig sein müssen.”)

Universität Leipzig Institut für Informatik Bioinformatik/IZBI	Algorithmen und Datenstrukturen II WiSe 2026/27 – Freiwillige Serie 3		
P.F. Stadler, T. Gatter			Seite 5/5

Lösung:

Der Beweis besteht aus zwei Teilen:

- a) Unabhängigkeitssystem. $\emptyset \in \mathcal{M}$, denn $\forall s \in \mathbb{N} : |\{y \in \emptyset : d(y) \leq s\}| = 0$.
Abgeschlossenheit von $\mathcal{M}$ unter Teilmengenbildung: Sei $A \in \mathcal{M}$ und $B \subseteq A$.
Dann ist

$$|\{y \in B : d(y) \leq s\}| \leq |\{y \in A : d(y) \leq s\}| \leq s$$

und deshalb $B \in \mathcal{M}$.

- b) Austauschenschaft von $\mathcal{M}$. Seien $A, B \in \mathcal{M}$ mit $|B| < |A|$.

Es gibt einen kleinsten Tag r , ab dem A mehr Aufträge y als B enthält, die zu diesem Stichtag fertig sein müssen (also Aufträge y mit $d(y) \leq r$). Inbesondere gilt dann, dass A mehr Aufträge y enthält, die genau eine Frist von r Tagen haben ($d(y) = r$).

Damit gibt es einen Auftrag $x \in A \setminus B$ mit $d(x) = r$. Wir zeigen $B \cup \{x\}$ ist in $\mathcal{M}$, d.h. (*) gilt für beliebige $s \in \mathbb{N}$. (Definiere $N_s(A) := |\{y \in A : d(y) \leq s\}|$).

Falls $s < d(x)$, so

$$N_s(B \cup \{x\}) = N_s(B) \leq s .$$

Falls $s \geq d(x) = r$, gilt

$$N_s(B \cup \{x\}) = N_s(B) + 1 .$$

Nach Wahl von r gilt $N_s(B) < N_s(A)$, also

$$N_s(B) + 1 \leq N_s(A) \leq s .$$